有限既約複素鏡映群をモノドロミーにもつ微分方程式系とその変形(微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題)

数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 95-101

有限既約複素鏡映群をモノドロミーにもつ微分方程式系とその変形

琉球大学 教育学部 加藤満生 (Mitsuo Kato)

1 序

行列 $A \in GL(n, \mathbf{C})$ が他の行列 B により,

$$BAB^{-1} = \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, a), \quad a \neq 1, a^k = 1 \text{ for some integer } k,$$

となるとき複素鏡映といい, 複素鏡映で生成される $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群を複素鏡映群という.

例えばガウスの超幾何微分方程式 $E(z) = {}_2E_1(-1/60, 11/60, 1/2; z)$ のモノドロミー群 G は位数 720 の複素鏡映群で, 射影モノドロミー群 $\mathbf{P}(G)$ は位数 60 の icosahedral group である. 微分方程式 $E(z)$ はこの複素鏡映群 G に対し次のような generating property をもつ:

"$E'(\zeta)$ を $\mathbf{P}^1$ 上の 2 階フックス型微分方程式で G の部分群をモノドロミーにもつとする. このとき適当な有理関数 $\theta(\zeta)$ と有理写像 (= 有理関数) $z = \sigma(\zeta)$ により $E'(\zeta)$ は

$$E'(\zeta) = \theta(\zeta)^{1/12} E(\sigma(\zeta))$$

と $E(z)$ により表される."

この $E(z)$ は 3 個の特異点に由来する 3-parameter deformation ${}_2E_1(a, b, c; z)$ をもつ.

本稿では $GL(3)$ 内の各有限既約複素鏡映群 G に対し generating property をもつ, $Z \simeq \mathbf{P}^2$ 上定義された rank 3 のフックス型微分方程式系 $E_{G,Z}$ を定義し, その具体形を斎藤恭司先生により導入された"logarithmic vector fields" を用いて与える. 同時に $E_{G,Z}$ の (1-または 2-paramerer) deformation も自然に得られることを示す. どの群に対しても議論は同様に進むので $G = G_{336}$ (位数 336 の群) として話を進める.

2 G_{336}-商 (アフィン) 空間上の解析学

2.1 Klein の結果

$U_3 = \{u = (u_1, u_2, u_3)\} = \mathbf{C}^3$ に既約に作用する群 $G = G_{336} \subset GL(U_3)$ は代数的に独立な 4,6,14 次の斉次不変多項式

$$F_4(u) = u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1, \ F_6(u), \ F_{14}(u)$$

をもち，かつ $\mathbf{C}[u]^G = \mathbf{C}[F_4(u), F_6(u), F_{14}(u)]$ が成り立つ．$X = \{x = (x_4, x_6, x_{14})\} = \mathbf{C}^3$ とし，$\pi_G : U_3 \longrightarrow X$ を $\pi_G(u) = (F_4(u), F_6(u), F_{14}(u))$ で定義するとこれは U_3 の G-商写像を与える．つまり 2 点 $u, u' \in U_3$ に対し

$$G \cdot u = G \cdot u' \Longleftrightarrow \pi_G(u) = \pi_G(u')$$

が成り立つ．この π_G と整合性を保つように，$\mathbf{C}[x] = \mathbf{C}[x_4, x_6, x_{14}]$ 上の weight $w(\cdot)$ を $w(x_k) = k$, $k = 4, 6, 14$ により定める．π_G の Jacobian を

$$J(u) = \frac{\partial(F_4, F_6, F_{14})}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$$

とおくとき $J^2(u)$ は G-不変となるので F_4, F_6, F_{14} の多項式になる．実際 X 上の $w(\cdot)$-斉次 42 次多項式

$$\begin{aligned} h(x) = &-2048x_4^9x_6 - 256x_4^7x_{14} + 22016x_4^6x_6^3 + 1088x_4^4x_6^2x_{14} - 60032x_4^3x_6^5 \\ &- 88x_4^2x_6x_{14}^2 + 1008x_4x_6^4x_{14} + 1728x_6^7 + x_{14}^3 \end{aligned}$$

に対し，定数倍を除き $J^2(u) = (h \circ \pi_G)(u)$ が成り立つ．$D = \{x \mid h(x) = 0\}$ は既約な超曲面になる．

2.2 D に接する logarithmic vector field

Euler operator

$$V^1 = 4x_4\partial_{x_4} + 6x_6\partial_{x_6} + 14x_{14}\partial_{x_{14}}$$

は $V^1h = 42h$ をみたすが，一般に多項式係数のベクトル場 V が

$$Vh(x) = \tilde{h}(x)h(x), \text{ for some } \tilde{h(x)} \in \mathbf{C}[x]$$

を満たすとき V を D に接する logarithmic vector field という．

補題 1 (Sekiguchi).

$$\begin{aligned} V^2 &= (1/9)(4x_4^3 + 9x_6^2)\,\partial_{x_4} + (1/12)(8x_4^2x_6 - x_{14})\,\partial_{x_6} \\ &\quad + (2/9)x_4(-168x_4^3x_6 - 11x_4x_{14} + 768x_6^3)\,\partial_{x_{14}}, \\ V^3 &= (7/3)(-152x_4^2x_6 + 3x_{14})\,\partial_{x_4} + 28x_4(-4x_4^3 + 7x_6^2)\,\partial_{x_6} \\ &\quad + (112/3)(24x_4^6 - 30x_4^3x_6^2 + 11x_4x_6x_{14} - 63x_6^4)\,\partial_{x_{14}} \end{aligned}$$

は D に接する斉次 logarithmic vector fields で次のことが成り立つ．

$$V^2h = V^3h = 0,\ w(V^2) = 8,\ w(V^3) = 10,\ [V^2, V^3] = (280/3)x_4x_6V^2 + (4/9)x_4^2V^3.$$

また ${}^t(V^1, V^2, V^3) = M_V\,{}^t(\partial_{x_4}, \partial_{x_6}, \partial_{x_{14}})$ で定義された係数行列の行列式 $\det M_V$ は定数倍 $(\neq 0))$ を除き $h(x)$ に等しい． □

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (dx_4, dx_6, dx_{14})\, M_V^{-1} \tag{2.1}$$

で定義される V^j の dual form ω_j は D に 1 位の極をもち，関数 $f(x)$ に対し

$$df = \sum (V^j f)\omega_j$$

を満たす.

2.3 D に特異点を持つ X 上の微分方程式系

$$\pi_G^{-1}(x) = u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)),$$

と書くとき，$\varphi(x) = \sum_j c_j u_j(x)$ が満たす rank 3 の微分方程式系を $E_{G,X}$ とおく．定義より $E_{G,X}$ のモノドロミー群は G になる．$E_{G,X}$ の π_G による引き戻し $\pi_G^* E_{G,X}$ は座標関数 u_j, $j = 1, 2, 3$ を解にもち，

$$\tilde{V}^1\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}, \quad d\,{}^t(\partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{u_3})\tilde{\varphi} = {}^t(0, 0, 0) \tag{2.2}$$

で定義される.

$$\tilde{V}^j = \pi_G^* V^j,\ \tilde{\omega}_j = \pi_G^*\omega_j,\ {}^t(\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \tilde{V}^3) = M_{\tilde{V}}\,{}^t(\partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{u_3})$$

とおく．特にこの時 $\tilde{V}^1 = \sum_j u_j \partial_{u_j}$ となる.

補題 2. 方程式 *(2.2)* は次の方程式

$$\tilde{V}^1\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}, \quad d\,{}^t(\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \tilde{V}^3)\tilde{\varphi} = \left(\sum_j (\tilde{V}^j M_{\tilde{V}}) M_{\tilde{V}}^{-1}\tilde{\omega}_j\right){}^t(\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \tilde{V}^3)\tilde{\varphi} \tag{2.3}$$

に同値となる．ここで行列 $\sum_j (\tilde{V}^j M_{\tilde{V}}) M_{\tilde{V}}^{-1}$ の成分は G-不変多項式となり，従って *(2.3)* は π_G により *"pull down"* できてその結果 $E_{G,X}$ は次の表示をもつ：

$$V^1\varphi = \varphi, \quad d\,{}^t(V^1, V^2, V^3)\varphi = \left(\sum_j P^j\omega_j\right){}^t(V^1, V^2, V^3)\varphi, \tag{2.4}$$

または

$$V^1\varphi = \varphi, \quad d\,{}^t(\varphi, V^2\varphi, V^3\varphi) = \left(\sum_j P^j\omega_j\right){}^t(\varphi, V^2\varphi, V^3\varphi), \tag{2.5}$$

ここで P^j の (k,l)-成分 P^j_{kl} は

$$w(P^j_{kl}) = w(V^j) + w(V^k) - w(V^l) \tag{2.6}$$

を満たす斉次多項式になる. □

補題 2 に述べた計算を実行すると次の結果を得る.

定理 1. $[V^2, V^3] = f_2^{23}V^2 + f_3^{23}V^3$ (*i.e.* $f_2^{23} = \frac{280}{3}x_4x_6$, $f_3^{23} = \frac{4}{9}x_4^2$) とする. 微分方程式系 $E_{G,X}$ は *(2.5)* で与えられ, その P^j は次のようになる：

$$P^1 = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & w(V^2)+w_0 & 0 \\ 0 & 0 & w(V^3)+w_0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -p_{22}^0 & -p_{22}^2 & -p_{22}^3 \\ -\frac{1}{2}p_{23}^0 & -\frac{1}{2}(p_{23}^2 - f_2^{23}) & -\frac{1}{2}(p_{23}^3 - f_3^{23}) \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}p_{23}^0 & -\frac{1}{2}(p_{23}^2 + f_2^{23}) & -\frac{1}{2}(p_{23}^3 + f_3^{23}) \\ -p_{33}^0 & -p_{33}^2 & -p_{33}^3 \end{pmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} &w_0 = 1, \\ &(p_{22}^0, p_{22}^2, p_{22}^3) = \left(-(1/81)x_4(20x_4^3 - 63x_6^2),\ (11/9)x_4^2,\ (1/56)x_6\right), \\ &(p_{23}^0, p_{23}^2, p_{23}^3) = \left((7/27)(656x_4^3x_6 - 3x_4x_{14} - 162x_6^3),\ -(1540/3)x_4x_6,\ -2x_4^2\right), \\ &(p_{33}^0, p_{33}^2, p_{33}^3) = \left(-(98/9)(576x_4^5 + 904x_4^2x_6^2 - 3x_6x_{14}),\ -12936(2x_4^3 - x_6^2),\ 210x_4x_6\right). \end{aligned}$$

□

この結果を踏まえ, 次の形の可積分系をすべて求めることを試みる.

$$V^1\varphi = w_0\,\varphi, \quad d\,{}^t(\varphi, V^2\varphi, V^3\varphi) = \left(\sum_j Q^j\omega_j\right){}^t(\varphi, V^2\varphi, V^3\varphi), \tag{2.7}$$

ここで Q^j の (k,l)-成分 Q^j_{kl} は

$$w(Q^j_{kl}) = w(V^j) + w(V^k) - w(V^l) \tag{2.8}$$

を満たす斉次多項式とする. このとき Q^j は

$$Q^1 = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & w(V^2)+w_0 & 0 \\ 0 & 0 & w(V^3)+w_0 \end{pmatrix}, \quad Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -q_{22}^0 & -q_{22}^2 & -q_{22}^3 \\ -\frac{1}{2}q_{23}^0 & -\frac{1}{2}(q_{23}^2 - f_2^{23}) & -\frac{1}{2}(q_{23}^3 - f_3^{23}) \end{pmatrix},$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}q_{23}^0 & -\frac{1}{2}(q_{23}^2 + f_2^{23}) & -\frac{1}{2}(q_{23}^3 + f_3^{23}) \\ -q_{33}^0 & -q_{33}^2 & -q_{33}^3 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

の形をしていて q^n_{jm} は

$$w(q^l_{jk}) = w(V^j) + w(V^k) - w(V^l) \tag{2.10}$$

を満たす斉次多項式である．条件式 (2.10) の下で可積分条件

$$dQ = Q \wedge Q \tag{2.11}$$

を解くと次の３種の可積分系を得る．

定理 2. *(2.10), (2.11) を満たす可積分系 (2.7) with (2.9) は次のものに限る．*

$E_I(r,s)$:

$w_0 = 14r - 42s - 6,$

$\bigl(q^0_{22}, q^2_{22}, q^3_{22}\bigr) = \bigl(-(1/81)(7r-3)x_4(56rx_4^3 - 210rx_6^2 + 12x_4^3 - 21x_6^2),\ (2/9)(7r+2)x_4^2,$
$(1/252)(7r+1)x_6\bigr),$

$\bigl(q^0_{23}, q^2_{23}, q^3_{23}\bigr) = \bigl((14/27)(7r-3)(784rx_4^3x_6 - 252rx_6^3 + 264x_4^3x_6 - 3x_4x_{14} - 36x_6^3),$
$-(280/3)(7r+2)x_4x_6,\ -(4/9)(7r+1)x_4^2\bigr),$

$\bigl(q^0_{33}, q^2_{33}, q^3_{33}\bigr) = \bigl(-(196/9)(7r-3)(672rx_4^5 + 1064rx_4^2x_6^2 + 240x_4^5 + 372x_4^2x_6^2 - 3x_6x_{14}),$
$-2352(7r+2)(2x_4^3 - x_6^2),\ (140/3)(7r+1)x_4x_6\bigr).$

$E_{II}(s)$:

$w_0 = -42s + 6,$

$\bigl(q^0_{22}, q^2_{22}, q^3_{22}\bigr) = \bigl((4/3)x_4x_6^2,\ (16/9)x_4^2,\ (1/21)x_6\bigr),$

$\bigl(q^0_{23}, q^2_{23}, q^3_{23}\bigr) = \bigl((56/3)(8x_4^3x_6 + x_4x_{14} - 16x_6^3),\ -(1400/3)x_4x_6,\ -(28/9)x_4^2\bigr),$

$\bigl(q^0_{33}, q^2_{33}, q^3_{33}\bigr) = \bigl(-784(8x_4^5 + 32x_4^2x_6^2 + x_6x_{14}),\ 7056(-2x_4^3 + x_6^2),\ (560/3)x_4x_6\bigr).$

$E_{III}(s)$:

$w_0 = -42s + 4,$

$\bigl(q^0_{22}, q^2_{22}, q^3_{22}\bigr) = \bigl((16/81)x_4(-2x_4^3 + 9x_6^2),\ -(4/9)x_4^2,\ 0\bigr),$

$\bigl(q^0_{23}, q^2_{23}, q^3_{23}\bigr) = \bigl((28/27)(392x_4^3x_6 - 3x_4x_{14} - 108x_6^3),\ (56/3)x_4x_6,\ (4/3)x_4^2\bigr),$

$\bigl(q^0_{33}, q^2_{33}, q^3_{33}\bigr) = \bigl((392/9)(-288x_4^5 - 592x_4^2x_6^2 + 3x_6x_{14}),\ 2352(4x_4^3 + x_6^2),\ -56x_4x_6\bigr).$

$E_I(r,s) = h^{-s}E_I(r,0)$, $E_{II}(s) = h^{-s}E_{II}(0)$, $E_{III}(s) = h^{-s}E_{III}(0)$ が成り立つので，s は本質的なパラメータとは言えない．特異点集合 D における特性指数は $E_I(r,s)$ の場合 $\{-s, -s, -s+r\}$，$E_{II}(s)$ の場合 $\{-s, -s+1/7, -s+5/7\}$, $E_{III}(s)$ の場合 $\{-s, -s+2/7, -s+3/7\}$ である．$r \notin \mathbf{Z}$ のとき $E_I(r,s)$ の D における局所モノドロミーは対角化可能である．特に $r \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ のとき，$E_I(r,0)$ のモノドロミー群は複素鏡映群になる．さらに

$$E_I(1/2,0) = E_{G,X}$$

が成り立つ．□

3 $E_{G,Z}$ とその変形

$$R_1 = F_{14}/(F_4^2F_6),\ R_2 = F_6^2/F_4^3$$

により $\mathbf{P}(U_3)$ の $\mathbf{P}(G)$-rational quotient map $\pi_R : [u] \in \mathbf{P}(U_3) \mapsto [R_1(u) : R_2(u) : 1] \in Z$ を定義する．$\mathbf{P}(G)$-rational quotient map は Z の birational transformations を除き一意である．また，G-不変斉次 2 次有理関数 $H_2(u)$ を任意に一つ固定する．ここでは

$$H_2 = F_6/F_4$$

とする．

$$v(z) = (v_1(z), v_2(z), v_3(z)) = \pi_R^{-1}(z)/H_2(\pi_R^{-1}(z))$$

で定義される多価関数 $v_j(z)$, $j = 1,2,3$ を解にもつ Z 上の rank 3 の微分方程式系を $E_{G,Z}(z)$，または π_R, H_2 をはっきりさせるため $E(\pi_R, H_2; z)$ と記す．定義よりこれのモノドロミー群が G となることは容易にわかる．

また，$E'(\zeta)$ を $\mathbf{P}^2$ 上の rank 3 のフックス型微分方程式系で，解の組 $u(\zeta) = (u_1(\zeta), u_2(\zeta), u_3(\zeta))$ に関するモノドロミー群が G の部分群であると仮定すると $\theta(\zeta) = H_2(u(\zeta))$, $\sigma(\zeta) = \pi_R(u(\zeta))$ (が定義可能となるようなある条件を $E'(\zeta)$ が満たしているとして) により定義される，有理関数 $\theta(\zeta)$，有理写像 $\zeta \mapsto \sigma(\zeta)$ により

$$E'(\zeta) = \theta(\zeta)^{1/2}E(\pi_R, H_2; \sigma(\zeta))$$

が成り立つので，$E(\pi_R, H_2; z)$ は G に対し generating property をもつと言える．この意味で $E_{G,Z} = E(\pi_R, H_2)$ を generating system for G と言うことにする．この system と前節の $E_{G,X}(x_4, x_6, x_{14})$ との関係は次の定理により与えられる．

定理 3. 上のように π_R, H_2 をとったとき

$$E(\pi_R, H_2; [z_1 : z_2 : 1]) = E_{G,X}(1/z_2, 1/z_2, z_1/z_2^3),$$
$$E_{G,X}(x_4, x_6, x_{14}) = (x_6/x_4)^{1/2}E(\pi_R, H_2; [x_{14}/(x_4^2x_6) : x_6^2/x_4^3 : 1])$$

が成り立つ．□

Proof. $\pi_G(v(z)) = (1/z_2, 1/z_2, z_1/z_2^3)$ より第 1 式は従う．$E_{G,X}(x_4, x_6, x_{14})$ の解は斉次 1 次より $E_{G,X}(x_4, x_6, x_{14}) = (x_6/x_4)^{1/2}E_{G,X}(x_4(x_4/x_6)^2, x_6(x_4/x_6)^3, x_{14}(x_4/x_6)^7)$ が成り立つので第 2 式が従う．□

系 4. $E_I(r, 0)(1/z_2, 1/z_2, z_1/z_2^3)$ は $E(\pi_R, H_2; z)$ の一つの変形を与える．□

定理 1, 2 で $E_{G,X}$, $E_I(r,s)$ の具体形が与えられているので上の定理 3, 系 4 は $E_{G,Z}$ とその変形の実用的な計算手段を与えている．

REFFERENCES

[Alk] A.G. Aleksandrov, Moduli of logarithmic connections along a free divisor, Contemporary Math., **314** (2002), 1-23.

[HK] Y. Haraoka and M. Kato, Generating systems for finite irreducible complex reflection groups, in preparation.

[St] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci, RIMS Kōkyūroku **287** (1977), 117-137.

[Sk] J. Sekiguchi, polydisk.dvi : dvi file (Sept., 2008).